Στατιστ. Συμπερ. 20/5

Στατιστικά Τεστ.

Στοιχεία στατιστικού Τεστ

1) Ζεύγος Στατιστικών υποθέσεων

$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_a : \theta = \theta_a$

ή γενικότερα

$H_0 : \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta \qquad H_a : \theta \in \Theta_a \subseteq \Theta$

(Απλή - Σύνθετη Υπόθεση)

π.χ $\theta = 5$, $\theta \gtrless 5$, $\theta \neq 5$

2) Στατιστική Συνάρτηση Τεστ (Σ.Σ.Τ)

Μια συνάρτηση του τ.δ $X_1, \dots, X_n$ και της παραμέτρου (συνήθως υπό την H_0)

$T = T(X_1, \dots, X_n, \theta(\theta_0))$

3) Κρίσιμη περιοχή (κ.π)

$C = \{\underline{x} : T(\underline{x}, \theta) \in A \subseteq \mathbb{R}\}$

Κρίσιμο σημείο

(συνήθως $T(\underline{x}, \theta) > k$ ή $T(\underline{x}, \theta) < k$)

Κανόνας Λήψης απόφασης για την απόρριψη (ή την αποδοχή) H_0

- Αν η τιμή της ΣΣΤ, $T(\underline{x}, \theta)$ περιλαμβάνεται στην Κ.Π τότε
<u>Απορρίπτω την H_0</u>
- Αν η τιμή της ΣΣΤ, δεν περιλαμβάνεται στην Κ.Π τότε
<u>Δεν μπορώ να απορρίψω την H_0</u>

Πως προσδιορίζεται το κρίσιμο σημείο?
<u>Απάντηση</u>: Σφάλματα τύπου I και II

4) <u>Σφάλματα τύπου I και II</u>

Στατιστικός

Φύση	Αποδοχή H_0	Απόρριψη H_0
Αληθεύει H_0	Σφάλμα 0	Σφάλμα Τύπου I
Αληθεύει H_a	Σφάλμα Τύπου II	Σφάλμα 0

Σφάλμα Τύπου I: Σφάλμα Απορ H_0 / H_0 Αληθής
Σφάλμα Τύπου II: Σφάλμα Αποδ H_0 / H_a Αληθής

a = P(Σφάλμα Τύπου I) = P(Απορ H_0 / H_0 Αληθής)

β = P(Σφάλμα Τύπου II) = P(Αποδ H_0 / H_a Αληθεύει)

Άρα Η απόφαση μου θα είναι ακλόνητη αν οι πιθανότητες σφαλμάτων I και II είναι οι μικρότερες δυνατές.

Συνεπώς ένα άριστο Στατιστικό Τεστ θα πρέπει να έχει α και β όσο το δυνατόν πιο μικρά.

Αποδεικνύεται όμως ότι τα α και β δεν μπορούν να ελαχιστοποιηθούν ταυτόχρονα.

Κρατώ το α μικρό ($\alpha = 0{,}001$, ή $0{,}01$ ή $0{,}05$) και προσπαθώ να βρω κ.π που ελαχιστοποιεί το $\beta = P(\text{Αποδ } H_0 / H_a \text{ Αληθής}) = 1 - P(\text{Απορ } H_0 / H_a \text{ αληθής})$

α = Επίπεδο Σημαντικότητας (ε.σ.) του τεστ.

γ = Ισχύς του Τεστ. με $\gamma = 1 - \beta$

Θέλουμε το α ώστε να μεγιστοποιείται το γ.

Ισχυρότατο Τεστ (I-τεστ) και Ομοιομόρφως Ισχυρότατο Τεστ (ΟΙ-τεστ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης H_0 έναντι μιας απλής H_a. I-τεστ με επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ) α ($0 < \alpha < 1$) για τον έλεγχο αυτό ονομάζεται το τεστ με την μέγιστη ισχύ $\gamma = 1 - \beta$ μεταξύ όλων των άλλων τεστ με το ίδιο ε.σ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ο έλεγχος μιας απλής ή σύνθετης Ho έναντι μιας σύνθετης Ha. Θεωρούμε ένα τεστ για τον έλεγχο αυτό και έστω $\gamma(\theta)$ η ισχύς του η οποία καθορίζεται από την Ha. Το τέστ θα λέγεται ΟΙ-τεστ αν η ισχύς του $\gamma(\theta)$ είναι $\forall\theta$ υπό την Ha μεγαλύτερη ή ίση από την ισχύ οποιουδήποτε άλλου τεστ ίδιου επιπέδου σημαντικότητας

Θεμελιώδες Λήμμα Neymann-Pearson (για την κατασκευή Ι-τεστ)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Έστω πρόβλημα ελέγχου απλής μηδενικής προς απλή εναλλακτική

$H_0: \theta = \theta_0$ έναντι $H_a: \theta = \theta_a$, θ_0, θ_a γνωστά $\in \Theta$

Αν υπάρχει μια κ.π C μεγέθους a και ένας σταθερός αριθμός $k \geq 0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_a)} \leq k \quad \forall \underline{x} \in C$$

και $\frac{L_0}{L_a} > k$ $\forall \underline{x} \in S - C$ τότε η C είναι η πλέον ισχυρή κ.π μεγέθους a για τον έλεγχο της Ho έναντι Ha.

Παρατήρηση

Πως σκέφτηκε ο Neyman - Pearson?

$$\frac{L_0}{L_a} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_a)} \simeq \frac{P_{\theta_0}(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_1+\varepsilon, \ldots, x_n-\varepsilon_n \le X_n \le x_n+\varepsilon)}{P_{\theta_a}(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_1+\varepsilon_1, \ldots, x_n-\varepsilon_n \le X_n \le x_n+\varepsilon)}$$

Μικρές τιμές του $\frac{L_0}{L_a}$ σημαίνει ότι $L_0 \ll L_a$ δηλ $P_{\theta_0} \ll P_{\theta_a}$

Παράδειγμα

(Εφαρμογή του Neymann - Pearson)

Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό. Να κατασκευαστεί Ι-τεστ με ε.σ. α για τον έλεγχο $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_a: \mu = \mu_a$ (μ_0, μ_a γνωστοί και $\mu_0 < \mu_a$)

Λύση

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$L_0 = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$

και $L_a = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2}$

Άρα η ισχυρότατη κ.π θα είναι:

$$\frac{L_0}{L_a} \le k \Rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2}} \le k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2\right)} \le k \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum(x_i-\mu_a)^2\right) \le \log k \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_a)^2 \ge -2\sigma^2\log k \Rightarrow$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}-2\mu_0\sum_{i=1}^{n}x_i+n\mu_0^2-\cancel{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+2\mu_a\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu_a^2 \ge -2\sigma^2\log k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\mu_a-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i \ge -2\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_a^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i \ge \frac{-2\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_a^2}{2(\mu_a-\mu_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} \ge \frac{-2\sigma^2\log k-n\mu_0^2+n\mu_a^2}{2n(\mu_a-\mu_0)} = k'$$

Άρα με βάση Neyman-Pearson η I-κ.π είναι

$$C=\{\underline{x} : \bar{x} \ge k'\} \qquad (k' : \text{κρίσιμο σημείο})$$

Μέχρι στιγμής φαίνεται ότι η ΣΣΤ είναι $\bar{X}$

Πρόβλημα: Ποιο είναι το κ'?

Πάντα αξιοποιώ το α : α = P(Απορ Ho / Ho αληθής) $\Rightarrow$

$$a = P\left(\bar{x} \geq \kappa' / x_1,\ldots,x_n \sim N(\mu,\sigma^2)\right) = P\left(\bar{x} \geq \kappa' / \bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) \Rightarrow$$

$$a = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\kappa'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} / \bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) \Rightarrow$$

$$a = P\left(Z \geq \frac{\kappa'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} / Z \sim N(0,1)\right)$$ και από ορισμό εκατοστιαίων σημείων

$$\frac{\kappa'-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z_a \Rightarrow \text{κ.σ } \kappa' = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$$

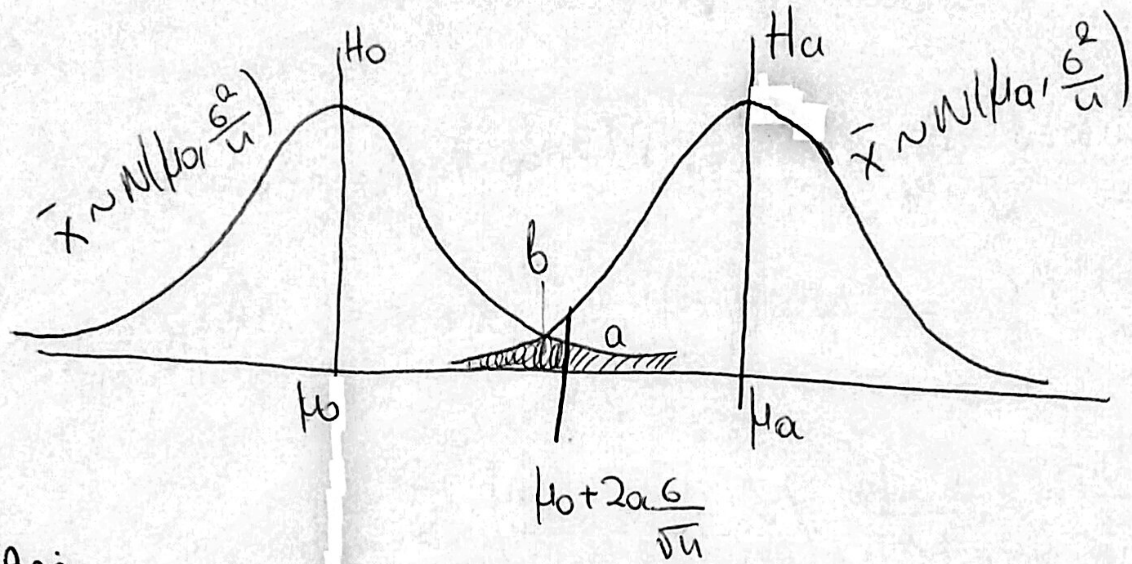
Συγκεντρωτικά: Για τον έλεγχο Ho: $\mu=\mu_0$ και Ha: $\mu=\mu_a$ ($\mu_a>\mu_0$) η ΣΣΤ είναι η $\bar{X}$ με κατανομή την $N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ υπό την Ho και η κ.π με ε.σ α την $\bar{X} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ή ισοδύναμα για τον έλεγχο Ho: $\mu=\mu_0$ έναντι Ha: $\mu=\mu_a$ η ΣΣΤ είναι $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ με κατανομή $N(0,1)$ υπό Ho και κ.π με ε.σ α. $Z \geq z_a$.

Παρατήρηση

1. Το τεστ αυτό είναι Z-τεστ

2.



Από το σχήμα παρατηρώ ότι δεν ελαχιστοποιούνται ταυτόχρονα τα α, β

Υπολογισμός Ισχύος του Z-τεστ

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - P(\text{Αποδ } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) = P(\text{Απορ } H_0 \mid H_a \text{ αληθ}) =$$

$$= P\left(\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; X_1, \dots, X_n \sim N(\mu_a, \sigma^2)\right) =$$

$$= P\left(\bar{x} \geq \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\middle|\; \bar{x} \sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \bar{x} \sim N\left(\mu_a, \frac{\sigma^2}{n}\right)\right) =$$

$$= P\left(Z \geq z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \quad , Z \sim N(0,1)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(z_a + \frac{\mu_0 - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

(Να εφαρμόσω την ίδια διαδικασία όπως για $\mu_a < \mu_0$)

Έλεγχος Απλής μηδενικής προς σύνθετη εναλλακτική / ΟΙ-τεστ)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό $f(x, \theta)$ $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Έστω προς έλεγχο $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_a : \begin{cases} \theta > \theta_0 \\ \theta < \theta_0 \\ \theta \neq \theta_0 \end{cases}$ (θ_0 = γνωστό)

Θεωρούμε τον έλεγχο της απλής H_0 έναντι της απλής H_0 δηλαδή $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι $H_a^* : \theta = \theta_a$ (όπου όμως το θ_a θα ικανοποιεί την αρχική H_a: $\theta_a > \theta_0$, $\theta_a < \theta_0$, $\theta_a \neq \theta_0$)

Αν το Ι-τεστ για τον έλεγχο της H_0 έναντι της H_a^* δεν εξαρτάται από το θ_a τότε αυτό είναι και το ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της H_0

Παράδειγμα

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 γνωστό. Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι $H_a : \mu > \mu_0$ (μ_0 = γνωστό)

Λύση

Θεωρούμε τον έλεγχο της απλής $H_0 : \mu = \mu_0$ έναντι $H_a^* : \mu = \mu_a$ (με $\mu_a > \mu_0$)

Το I-τεστ για τον έλεγχο της Ho έναντι H_a^* έχει

Σ.Ζ.Τ $Z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ υπό την Ho και κ.π με ε.σ α
την $Z \geq Z_a$

Παρατηρούμε ότι το I-τεστ για τον έλεγχο της $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι της $H_a^*: \mu=\mu_a \ (\mu_a>\mu_0)$ δεν εξαρτάται από το μ_a. Άρα αυτό είναι και το ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο $H_0: \mu=\mu_0$ έναντι $H_a: \mu>\mu_0$.

<u>Παράδειγμα</u> (θα λυθεί πλήρως την Τρίτη)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $Εκθ(\lambda)$, $\lambda>0$
και $f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$, $\lambda>0$. Να κατασκευαστεί ΟΙ-τεστ για τον έλεγχο της $H_0: \lambda=\lambda_0$ έναντι $H_a: \lambda>\lambda_0$ (λ_0 = γνωστό)

<u>Λύση</u> (μια ιδέα)

Θεωρώ $H_0: \lambda=\lambda_0$ έναντι $H_a^*: \lambda=\lambda_a \ (\lambda_a>\lambda_0)$

$\dfrac{L_0}{L_a} \leq k \iff \dots \iff$ Στατιστική Συνάρτηση $\gtrless k'$